

# Vlastnosti a modelování aditivního bílého šumu s normálním rozdělením

kacmarp@fel.cvut.cz

verze: 20090913

## 1 Bílý šum s normálním rozdělením

V této kapitole se budeme zabývat reálným gaussovským šumem  $n(t)$ , připomeneme jeho vlastnosti a popíšeme způsob, jak ho lze modelovat v numerických simulacích. Komplezní reprezentací (komplezní obálkou)  $\tilde{n}(t)$  šumu  $n(t)$  se budeme zabývat v kap. 3.

Bílý šum (šum s bílým spektrem) je často používaná aproximace širokopásmového šumu, který má konstantní spektrální výkonovou hustotu v uvažované šířce zpracování signálu. Připomeňme, že „bělost“ šumu  $n(t)$  neimplikuje žádné rozložení hustoty pravděpodobnosti, tj. bílý šum nemusí mít nutně normální (gaussovské) rozložení.

Předpokládejme, že spektrální výkonová hustota bílého šumu  $n(t)$  nabývá pro všechny (úhlové) kmitočty hodnoty  $N_0/2$ , tedy

$$\mathcal{C}_{n(t)}(\omega) = \frac{N_0}{2}. \quad (1)$$

To odpovídá korelační funkci

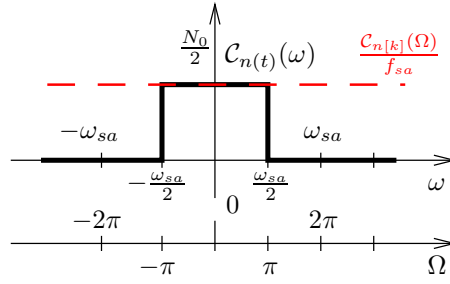
$$\mathcal{R}_{n(t)}(\tau) = \text{FT}^{-1}\{\mathcal{C}_{n(t)}(\omega)\} = \frac{N_0}{2} \delta(\tau). \quad (2)$$

Uvedená vlastnost říká, že hodnoty  $n(t_1)$  a  $n(t_2)$  jsou nekorelované pro libovolně malý interval  $\tau = t_2 - t_1$ . Reálně signál s takovými vlastnostmi nemůže existovat, neboť pro libovolný fixní čas  $t_1$  má náhodná veličina  $n(t_1)$  nekonečný rozptyl:  $\text{var}\{n(t_1)\} = \mathcal{R}_{n(t)}(\tau)\Big|_{\tau=0} \rightarrow \infty$ . Dále, výkon signálu se spektrální výkonovou hustotou dle (1) je nekonečný neboť platí:  $P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{C}_{n(t)}(\omega) d\omega \rightarrow \infty$ .

### Pásmově omezený bílý šum

Pásmově omezený bílý šum – pásmově omezený na (jednostrannou) šířku pásma  $B$  – představuje reálně interpretovatelnou aproximaci širokopásmového šumu. Spektrální a korelační vlastnosti jsou

$$\mathcal{C}_{n(t)}(\omega) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & \text{pro } \omega \in (-2\pi B, 2\pi B), \\ 0 & \text{jinde,} \end{cases} \quad (3)$$



**Obr. 1:** Spektrální výkonová hustota pásmově omezeného šumu a spektrální výkonová hustota jeho vzorků.

$$\mathcal{R}_{n(t)}(\tau) = BN_0 \text{Sa}(2\pi B\tau). \quad (4)$$

Výkon (rozptyl) takového signálu pak je

$$P = \text{var}\{n(t)\} = N_0B. \quad (5)$$

### Nastavení rozptylu šumového generátoru

Při úloze simulace algoritmů zpracování signálu stojíme před problémem, jak nastavit hodnotu rozptylu šumového generátoru  $\sigma^2$ , aby generovaný náhodný signál správně representoval chování systému za přítomnosti aditivního bílého šumu s požadovanou oboustrannou spektrální výkonovou hustotou  $C_{n(t)}(\omega) = \frac{N_0}{2}$ . Simulaci systému provádíme zpravidla v diskrétním čase se vzorkovacím (úhlovým) kmitočtem  $\omega_{sa}$ . Předpokládáme tedy, že spektra všech uvažovaných signálů lze zanedbat (jsou nulové) pro  $|\omega| > \omega_{sa}/2$ . Stejná podmínka musí platit i pro šumový signál  $n(t)$ . Pokud budeme bílý šum aproximovat pásmově omezeným šumem s konstantní spektrální hustotou  $\frac{N_0}{2}$  na intervalu  $|\omega| < \omega_{sa}/2$ , chování systému se z pohledu zpracování signálu nezmění. Pásmovým omezením bílého šumu získáme fyzikálně existující signál (s konečným výkonem), který lze vzorkovat s  $\omega_{sa}$ . Pásmově omezený šum  $n(t)$  má autokorelační funkci  $\mathcal{R}_n(\tau) = \frac{\omega_{sa}}{2\pi} \frac{N_0}{2} \text{Sa}\left(\frac{\omega_{sa}\tau}{2}\right) = f_{sa} \frac{N_0}{2} \text{Sa}(\pi f_{sa}\tau)$ . Vzorkováním šumu  $n(t)$  na násobcích  $1/f_{sa}$ , získáme nekorelované vzorky šumu  $n[k] = n(k\frac{1}{f_{sa}})$ , autokorelační funkce vzorku  $n[k]$  je  $\mathcal{R}_{n[k]}[m] = f_{sa} \frac{N_0}{2} \delta[m]$ . Rozptyl vzorků šumu je  $\text{var}\{n[k]\} = \mathcal{R}[0] = f_{sa} \frac{N_0}{2}$  (a to je zároveň i výkon diskrétního signálu  $n[k]$ ). Tuto hodnotu je pak potřeba použít při nastavení rozptylu šumového generátoru.

Platí, že výkon spojitého signálu je číselně roven výkonu jeho vzorků (za předpokladu dodržení vzorkovací podmínky). Proto i výkon pásmově omezeného šumu na intervalu  $|\omega| < \omega_{sa}/2$  je roven výkonu vzorků  $n[k]$  generovaných s rozptylem  $\sigma^2 = \frac{\omega_{sa}}{2\pi} \frac{N_0}{2} = f_{sa} \frac{N_0}{2}$ . Spektrální hustota pásmově omezeného šumu a spektrální hustota jeho vzorků je znázorněna na obr. 1.

## Implementace v programu MATLAB

Funkce `randn(m,n)` generuje matici rozměru  $m \times n$ . Prvky matice jsou náhodné nekorelované hodnoty s normálním rozdělením s  $\mu = 0$  a  $\sigma^2 = 1$ . Pro generování vzorků pásmově omezeného bílého gaussovského šumu se zadanou spektrální výkonovou hustotou  $N_0/2$  je potřeba ale zajistit rozptyl s požadovanou hodnotou  $\sigma^2 = \frac{\omega_{sa}}{2\pi} \frac{N_0}{2} = f_{sa} \frac{N_0}{2}$ .

Pokud má náhodná veličina  $X$  střední hodnotu  $\mu_X = 0$  a rozptyl  $\sigma_X^2 = 1$ , pak náhodná veličina  $Y$  s  $\mu_Y$  a  $\sigma_Y^2$  se získá transformací

$$Y = \sigma_Y X + \mu_Y. \quad (6)$$

Konkrétně: 100 vzorků bílého gaussovského šumu s rozptylem (a tedy i výkonem) 10 se získá:

```
noise=sqrt(10)*randn(1,100);
```

## 2 Komplexní obálka

*V této části připomeneme základní vztahy mezi reálným pásmovým signálem (BP – band pass) a jeho komplexní reprezentací (komplexní obálkou, CE – complex envelope). Zde uvedená definice komplexní obálky a způsob značení vychází ze [1].<sup>1</sup>*

Spektrum komplexní obálky  $\tilde{S}(\omega)$  se ze spektra pásmového signálu  $S(\omega)$  získá jako

$$\tilde{S}(\omega) = 2 U_s(\omega - \omega_0) S(\omega - \omega_0). \quad (7)$$

Časový průběh komplexní obálky  $\tilde{s}(t)$  lze pak filtrační metodou z pásmového signálu  $s(t)$  získat dle vztahu

$$\tilde{s}(t) = [2s(t) \exp(-j\omega_0 t)]_{DP}. \quad (8)$$

Komplexní obálka lze rovněž zapsat pomocí dvojice reálných nízkofrekvenčních signálů, a to buď pomocí soufázové  $s_I(t)$  a kvadraturní  $s_Q(t)$  složky nebo pomocí obálky  $|\tilde{s}(t)|$  a fáze  $\arg\{\tilde{s}(t)\}$

$$\tilde{s}(t) = s_I(t) + js_Q(t) = |\tilde{s}(t)| \exp(j \arg\{\tilde{s}(t)\}) \quad (9)$$

Pásmový signál  $s(t)$  lze z komplexní obálky získat vztahem

$$s(t) = \text{Re}\{\tilde{s}(t) \exp(j\omega_0 t)\}. \quad (10)$$

---

<sup>1</sup>V literatuře se používají i jiné definiční vztahy (navzájem se liší násobnou konstantou). Pozor rovněž na značení. Explicitní označení komplexní obálky vlnovkou nad symbolem signálu či spektra není v literatuře jednotně dodržován. Někdy se vlnovkou označuje pásmový signál a komplexní obálka se explicitně neoznačuje. Volba je na autorovi textu: obvykle, pokud většina vzorců a odvození v textu je napsána pro komplexní obálku, bylo by její explicitní značení vlnovkou z pohledu psaní textu pracné a proto je vhodnější v tomto případě označit vlnovkou pásmový signál.

Uvedme dále, že výkon komplexní obálky je číselně  $2\times$  větší než výkon pásmového signálu, tedy  $2P_s = P_{\tilde{s}}$ .

Pro komplexní obálku  $\tilde{s}(t)$  obecného stacionárního signálu (v širším smyslu)  $s(t)$  (nemusí se nutně jednat o pásmový signál) lze odvodit následující souvislosti mezi PSD jednotlivých signálů, viz např. [2]

$$\mathcal{C}_{\tilde{s}}(\omega) = 4\mathcal{C}_s(\omega + \omega_0) \text{Us}(\omega + \omega_0), \quad (11)$$

$$\mathcal{C}_{s_I}(\omega) = \mathcal{C}_{s_Q}(\omega) = \mathcal{C}_s(\omega + \omega_0) \text{Us}(\omega + \omega_0) + \mathcal{C}_s(\omega - \omega_0) \text{Us}(-(\omega - \omega_0)), \quad (12)$$

$$\mathcal{C}_{s_I s_Q}(\omega) = j \left( \mathcal{C}_s(\omega + \omega_0) \text{Us}(\omega + \omega_0) - \mathcal{C}_s(\omega - \omega_0) \text{Us}(-(\omega - \omega_0)) \right). \quad (13)$$

### 3 Komplexní obálka AWGN

V této kapitole jsou shrnuty vlastnosti reálného pásmově omezeného gaussovského šumu  $n(t)$  a jemu odpovídající komplexní reprezentace (komplexní obálky)  $\tilde{n}(t)$ . Definiční vztah komplexní obálky odpovídá popisu z kap. 2.

Pásmově omezený bílý gaussovský šum okolo nosného kmitočtu  $\omega_0$  označíme  $n(t)$ , jeho spektrální výkonovou hustotu  $\mathcal{C}_n(\omega)$ , viz obr. 2 a). Pro charakteristiky  $n(t)$  platí (protože signál  $n(t)$  je striktně ergodický, jsou uvedené pravděpodobnostní charakteristiky shodné s charakteristikami časovými)

$$\text{E}\{n(t)\} = 0, \quad (14)$$

$$\mathcal{R}_n(\tau) = \text{E}\{n(t)n(t+\tau)\} = B_{IF}N_0 \cos(\omega_0\tau) \text{Sa}(\pi B_{IF}\tau). \quad (15)$$

Speciálně pro výkon (rozptyl)  $n(t)$  platí

$$P_n = \text{var}\{n(t)\} = \mathcal{R}_n(0) = \sigma_n^2 = B_{IF}N_0. \quad (16)$$

Komplexní obálku  $\tilde{n}(t)$  pásmově omezeného šumu  $n(t)$  lze vyjádřit pomocí soufázové a kvadraturní složky

$$\tilde{n}(t) = n_I(t) + jn_Q(t). \quad (17)$$

Signály  $n_I(t)$  a  $n_Q(t)$  jsou striktně ergodické vzájemně nezávislé (důsledek vztahu 13) s normálním rozdělením a se spektrální výkonovou hustotou dle obr. 2 b) (vychází ze vztahu 12). Pro charakteristiky soufázové a kvadraturní složky platí

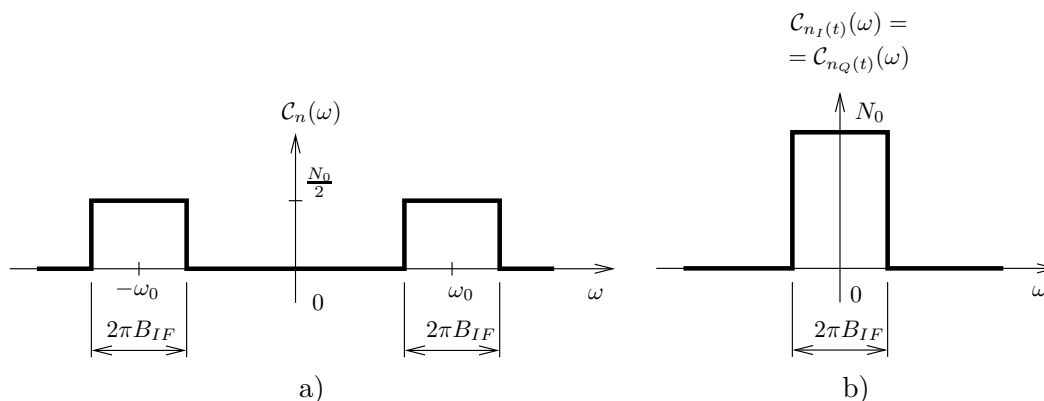
$$\text{E}\{n_I(t)\} = \text{E}\{n_Q(t)\} = 0, \quad (18)$$

$$\text{E}\{n_I(t)n_Q(t+\tau)\} = 0 \quad \text{pro } \forall \tau, \quad (19)$$

$$\mathcal{R}_{n_I}(\tau) = \mathcal{R}_{n_Q}(\tau) = \text{E}\{n_I(t)n_I(t+\tau)\} = B_{IF}N_0 \text{Sa}(\pi B_{IF}\tau), \quad (20)$$

$$P_{n_I} = P_{n_Q} = \text{var}\{n_I(t)\} = \text{var}\{n_Q(t)\} = B_{IF}N_0, \quad (21)$$

$$P_{\tilde{n}} = P_{n_I} + P_{n_Q} = 2B_{IF}N_0. \quad (22)$$



**Obr. 2:** PSD pásmově omezeného bílého šumu  $n(t)$  a jeho reprezentace komplexní obálkou  $\tilde{n}(t) = n_I(t) + jn_Q(t)$ .

$$C_{n_I}(\omega) = C_{n_Q}(\omega) = \begin{cases} N_0 & \text{pro } |\omega| < 2\pi \frac{B_{IF}}{2}, \\ 0 & \text{jinde,} \end{cases} \quad (23)$$

$$C_{\tilde{n}}(\omega) = \begin{cases} 2N_0 & \text{pro } |\omega| < 2\pi \frac{B_{IF}}{2}, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases} \quad (24)$$

Pásmově omezený bílý šum  $n(t)$  na nosném kmitočtu  $\omega_0$  lze použitím vztahu (10) alternativně zapsat ve tvaru

$$n(t) = n_I(t) \cos(\omega_0 t) - n_Q(t) \sin(\omega_0 t). \quad (25)$$

### Příklad:

Signál dig. modulace necht' má výkon  $C = 2.0$  W. Vygenerujte vzorky komplexní obálky AWGN tak, aby výsledný signál měl poměr  $C/N_0 = 53$  dB-Hz (pozor, jedná se o poměr výkonu užitečného signálu  $C$  ku spektrální výkonové hustotě šumu  $N_0$ ). Uvažujte  $f_{sa} = 66.7$  kHz.

### Výpočet:

$[C/N_0]_{dB} = 10 \log_{10} \left( \frac{C}{N_0} \right)$ , z toho:  $\left( \frac{C}{N_0} \right) = 10^{[C/N_0]_{dB}/10} = 10^{53/10} \doteq 200$  kHz. Pro PSD šumu dostaneme  $N_0 = C / \left( \frac{C}{N_0} \right) = 2.0 / 200\,000 = 0.01 \cdot 10^{-3}$  W/Hz. Výkon soufázové a kvadraturní složky šumu je  $N_0 f_{sa} = 0.001 \cdot 10^{-3} \times 66.7 \cdot 10^3 = 0.667$  W. Tato hodnota je zároveň i rozptylem těchto složek a použijeme ji pro nastavení šumového generátoru.

### Implementace v MATLABu:

```
N=1000;          % delka signalu
C=2.0;          % vykon [W]
C_No_dB = 53;   % [dB-Hz]
fsa=66.7;      % [Hz]
%-----
C_No=10^(C_No_dB/10);
No=C/C_No;
PnI=No*fsa;    % vykon/rozptyl soufazove (relane) casti AWGN
nI=sqrt(PnI)*randn(1,N); % realna cast AWGN
nQ=sqrt(PnI)*randn(1,N); % imaginarni cast AWGN
nCE=nI+1j*nQ; % komplexni obalka AWGN
```

### Literatura

- [1] HRDINA, Z.; VEJRAŽKA, F.: *Signály a soustavy*. [Skriptum]. ČVUT, Praha 1998.
- [2] SÝKORA, J.: *Digitální rádiová komunikace II*. [Skriptum]. ČVUT, Praha 1998.